Deelsessie:

Concrete toepassingen van goniometrie, differentiëren & integreren bij technische HBO opleidingen

Ir. Juriaan van der Graaf

Instituut voor Engineering en Applied Science

Inleiding

Juriaan van der Graaf

- BSc Mechanical Engineering (TU Delft)
- MSc Biomedical Engineering (TU Delft)

- 1 jaar - TU Delft (teacher’s assistant)
- 9 jaar - Lyceo (examentraining, huiswerkbegeleiding, bijlessen, etc)
- 2 jaar - Hogeschool Rotterdam, opleiding Werktuigbouwkunde

Inleiding

“Waar heb ik dit voor nodig?!”

Kern van waarheid:

- Wiskunde op middelbare school is “race” door onderwerpen
- *Teaching to the test* = fenomeen op zowel **VO**, HO, WO
- Motivatie, interesse & enthousiasme daalt wanneer “echte” leerdoel onduidelijk is

Persoonlijke mening:

- Minder onderwerpen, maar meer toepassingen van de behandelde stof, zou ten goede komen van leerlingen/studenten

Inleiding

Doel van deze deelsessie

- (klein) antwoord op de vraag "**waar heb ik dit voor nodig?!**"
- 3 concrete voorbeelden geven van praktisch nut van aantal grote VO wiskunde onderwerpen (*goniometrie, differentiëren, integreren*) **– op VO leerling niveau.**
- Ervaringen / ideeën delen?

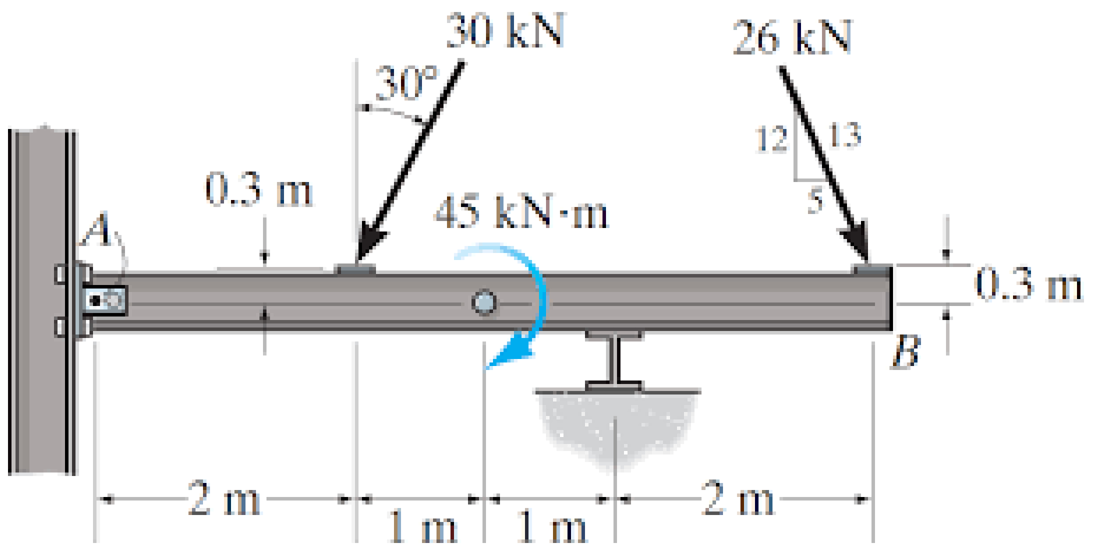
Goniometrie

Bouwsteen voor veel technische opleidingen: **Statica**

Statica is het deel van de **mechanica** wat zich bezig houdt met evenwicht van lichamen die onderhevig zijn aan belasting

Komt o.a. voor bij (zowel HBO als WO):

- Werktuigbouwkunde
- Maritieme techniek
- Lucht- en ruimtevaart
- Bouwkunde
- Civiele techniek

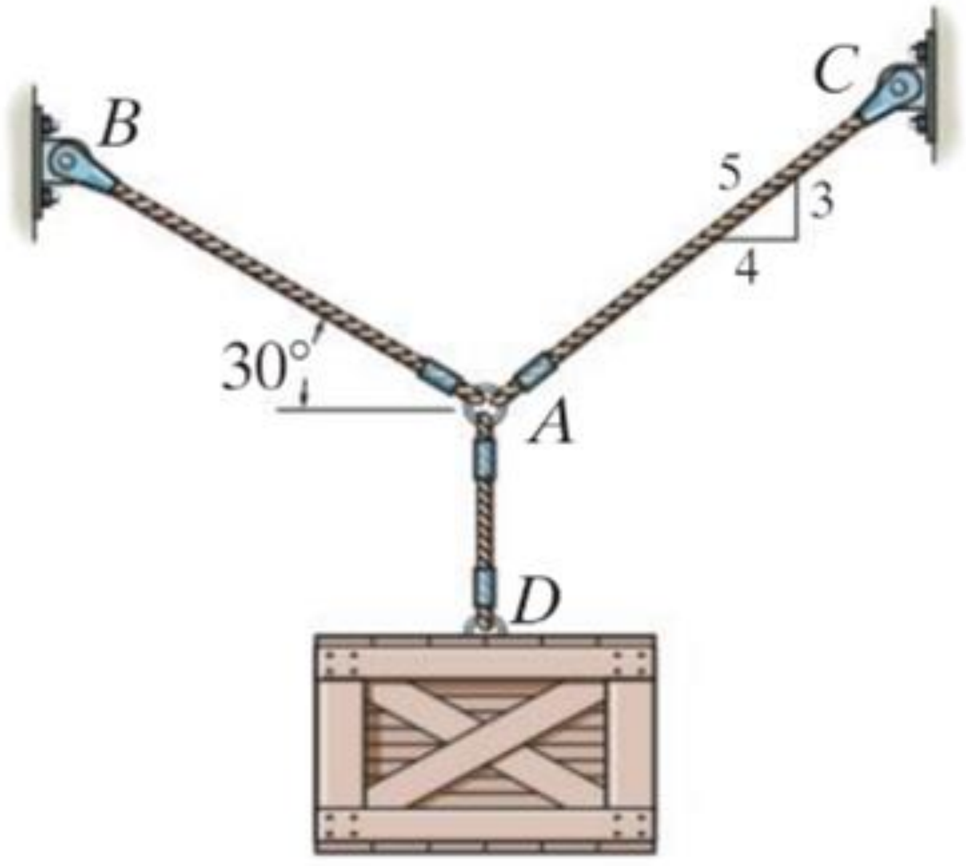


Goniometrie

Studenten leren te bepalen wat welke krachten er op treden (en waar) in **statisch belaste constructies**.

Nodig om te bepalen hoe sterk een constructie moet zijn, welk materiaal gebruikt moet worden, etc

Het krat heeft een gewicht van 550 N. Bepaal de kracht in elke dragende kabel.



Gonio - Uitwerking

Er is een trekkracht in AB, AC, & AD. Er is gegeven $F_{ad} = 550N$
Om evenwicht te bereiken moet gelden:

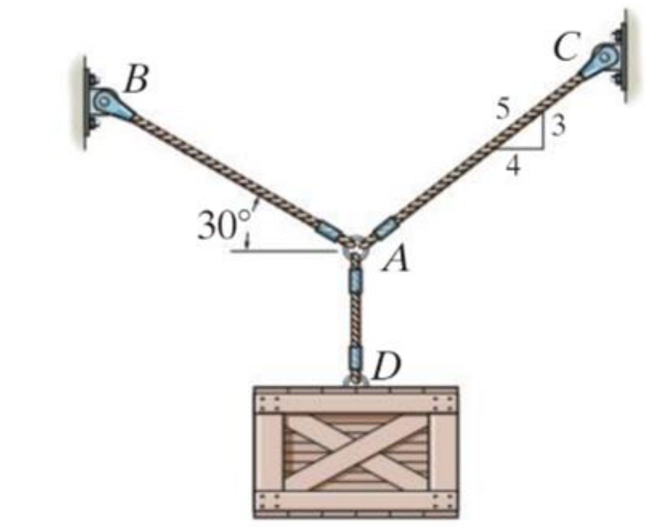
$$\sum F_x = 0 \qquad \& \qquad \sum F_y = 0$$

$$\sum F_x = -\cos(30) \cdot F_{ab} + \frac{4}{5} \cdot F_{ac} = 0$$

$$\sum F_y = -550 + \sin(30) \cdot F_{ab} + \frac{3}{5} \cdot F_{ac} = 0$$

Dit geeft ons 2 vergelijkingen en 2 onbekenden. Via substitutie lossen we verder op *(zie volgende slide)*

Het krat heeft een gewicht van 550 N. Bepaal de kracht in elke dragende kabel.



Gonio - Uitwerking

$$\sum F_x = -\cos(30) \cdot F_{ab} + \frac{4}{5} \cdot F_{ac} = 0$$

$$\sum F_y = -550 + \sin(30) \cdot F_{ab} + \frac{3}{5} \cdot F_{ac} = 0$$

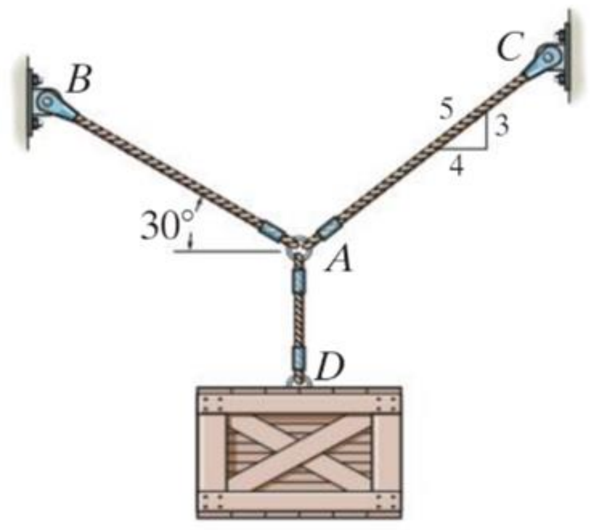
Herschrijven van $\sum F_x$ geeft ons:

$$F_{ac} = \frac{5}{4}\cos(30) \cdot F_{ab}$$

Substitueren in $\sum F_y$ geeft:

$$-550 + \sin(30) \cdot F_{ab} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4}\cos(30) \cdot F_{ab} = 0$$

Het krat heeft een gewicht van 550 N. Bepaal de kracht in elke dragende kabel.



Gonio - Uitwerking

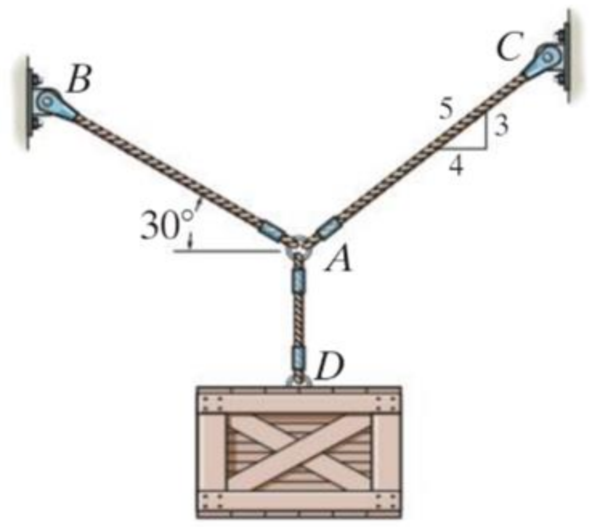
$$-550 + \sin(30) \cdot F_{ab} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} \cos(30) \cdot F_{ab} = 0$$

$$F_{ab}\left(\sin(30) + \frac{3}{4}\cos(30)\right) = 550$$

$$F_{ab} = \frac{550}{\sin(30) + \frac{3}{4}\cos(30)} \approx 478N$$

$$F_{ac} = \frac{5}{4}\cos(30) \cdot F_{ab} \approx 518\text{N}$$

Het krat heeft een gewicht van 550 N. Bepaal de kracht in elke dragende kabel.



Differentiëren

Differentiëren komt veel voor bij technische opleidingen:

Bijvoorbeeld:

- Differentiëren vormt basis voor integreren (wat grote rol speelt bij technische opleidingen)
- Verband positie-snelheid-versnelling: $a = \frac{dv}{dt}$ & $v = \frac{ds}{dt}$ (s is afgelegde weg)
- Afgeleides komen voor in formules bij mechanica, dynamica, stromingsleer, thermodynamica, sterkteleer
- Optimalisatieproblemen (maximale toerental, maximale belasting, minimale kosten, minimale doorbuiging, etc)

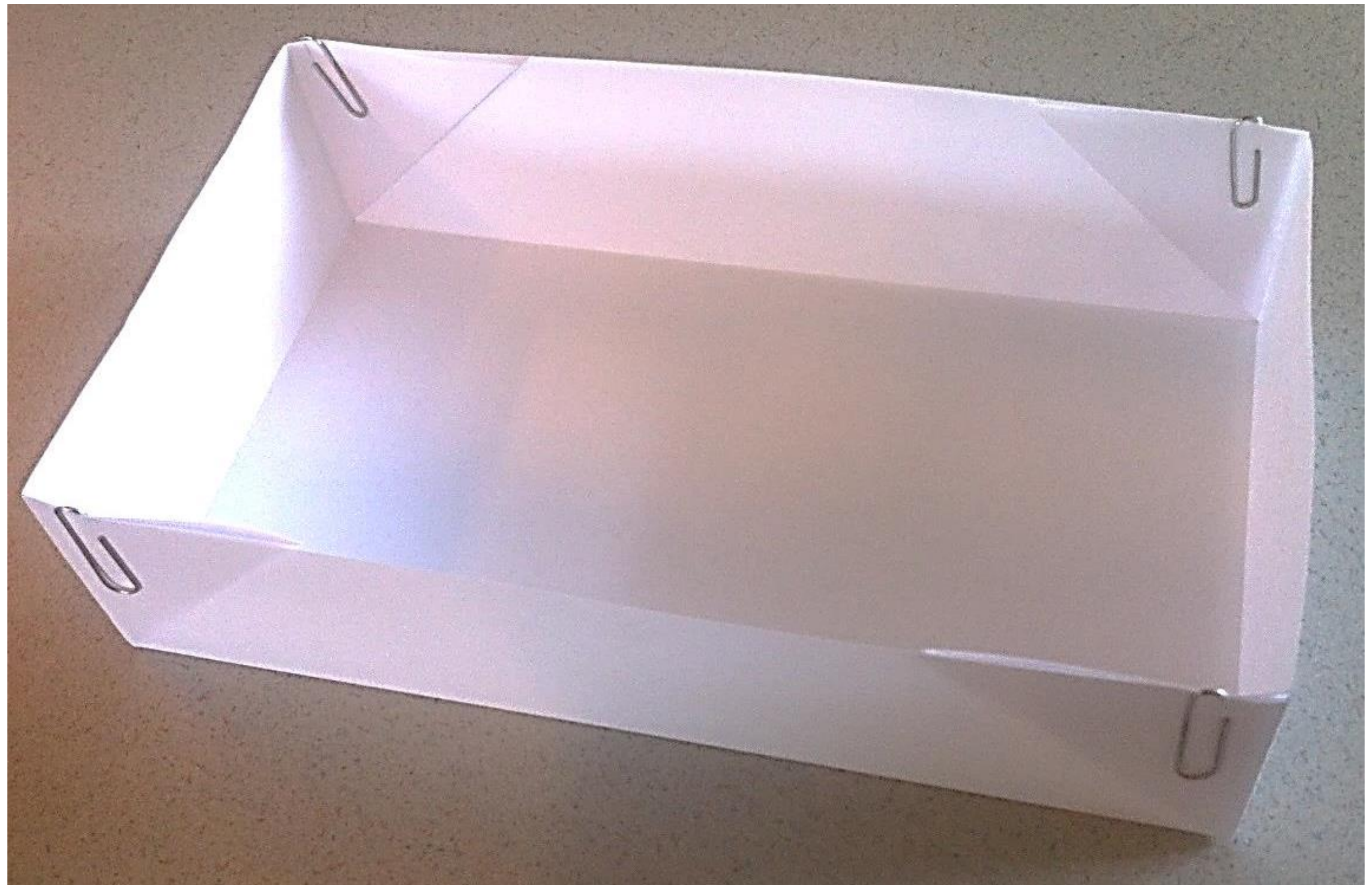
Differentiëren

Optimalisatieprobleem:

- We hebben één A4tje aan materiaal. Hoe maken we een bakje met zo groot mogelijke inhoud?

Dit is te linken aan real-life technische vraagstukken:

- Je hebt een opslagtank nodig op een boot. Hoe maak je met zo min mogelijk materiaal (=gewicht) een opslagtank met bepaalde inhoud?



Voorbeeld PDF (inclusief uitwerking en uitleg) door **Peter Overbeek**

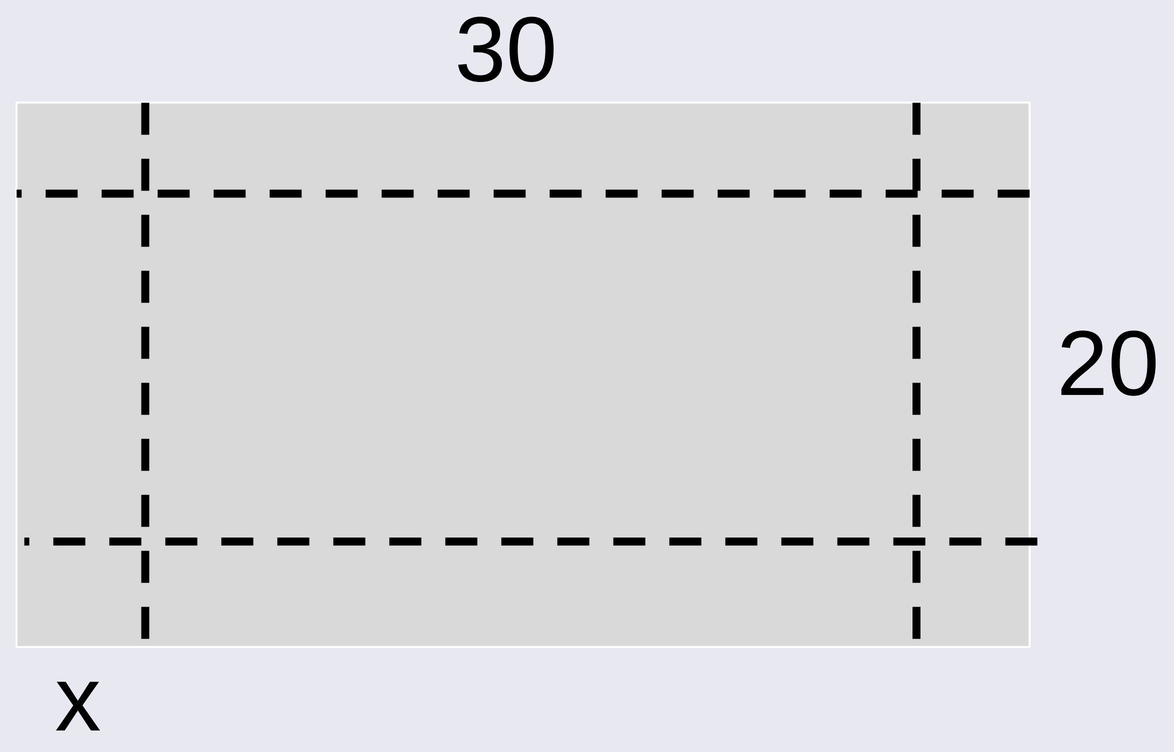
Differentiëren

$I(x) = (30 - 2x)(20 - 2x)x$
$I(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$

Voor de maximale inhoud, willen we $I(x)$ differentiëren en gelijkstellen aan 0.

$I'(x) = 12x^2 - 200x + 600$
$I'(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 200x + 600 = 0$

ABC-formule invullen geeft 2 oplossingen:
$x_1 \approx 12{,}743$ en $x_2 \approx 3{,}924$



door **Peter Overbeek**

Differentiëren

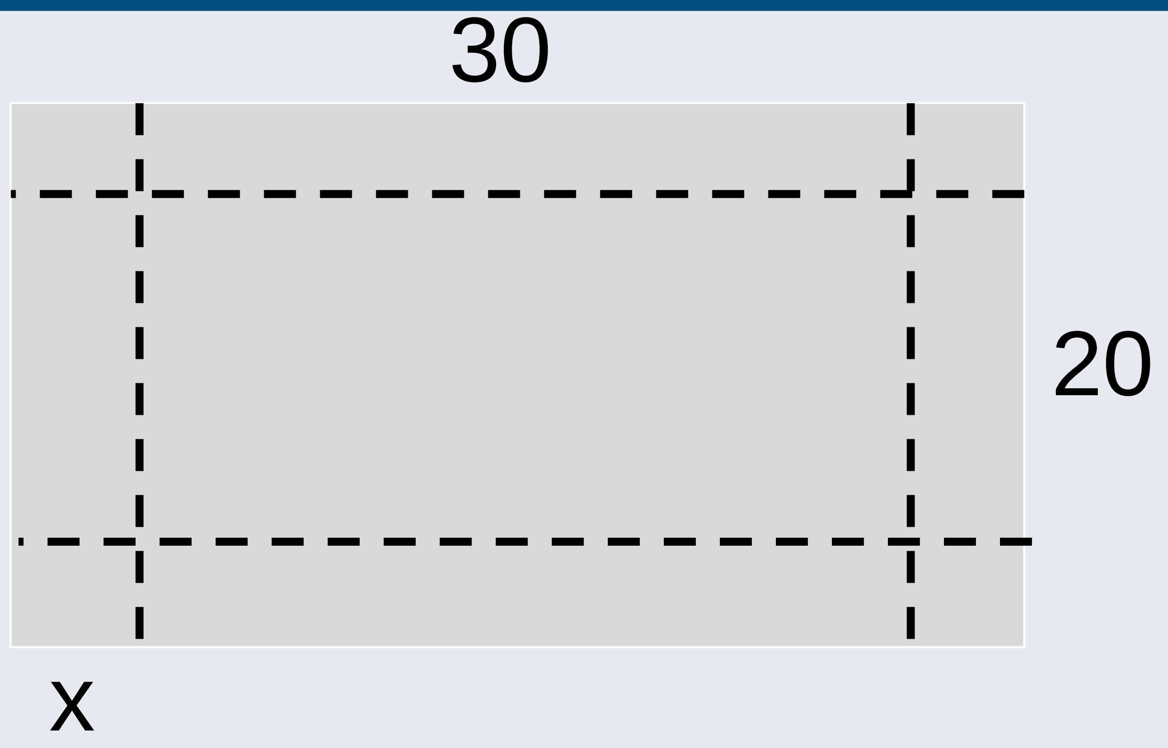
$$I(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$$

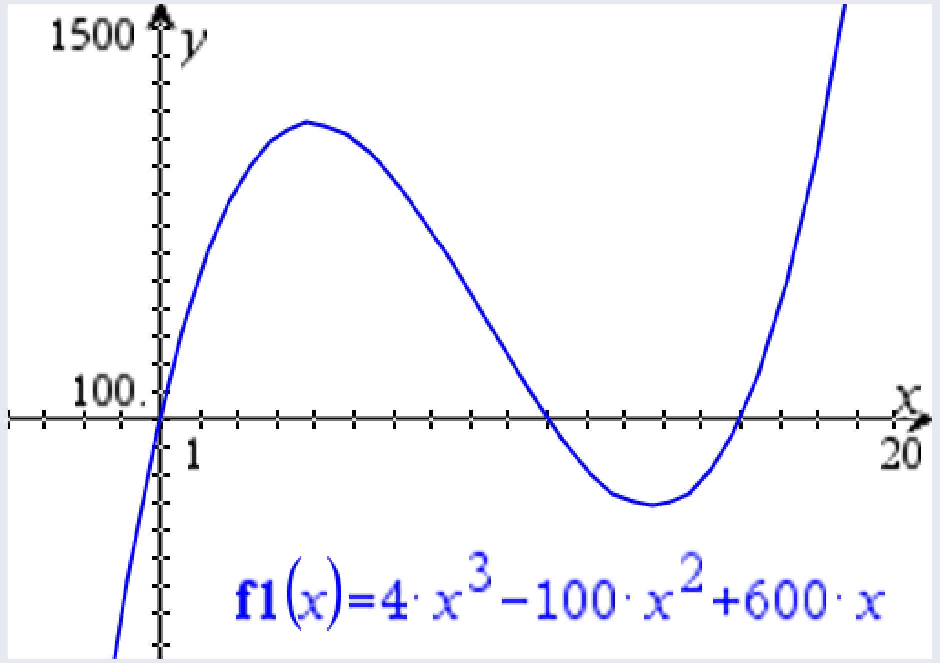
ABC-formule invullen geeft 2 oplossingen:
$x_1 \approx 12{,}743$ en $x_2 \approx 3{,}924$

De eerste oplossing hebben we niks aan,
want x moet kleiner dan 10 zijn.

We vinden dus een maximale inhoud wanneer $x \approx 3{,}924$

$$I_{max}(3{,}924) = 1056{,}3\ cm^3 = 1{,}06\ liter$$





door **Peter Overbeek**

Integreren

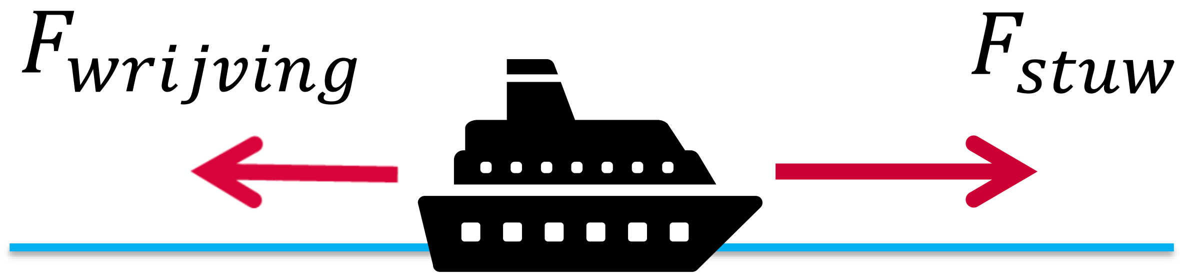
Integreren komt veel voor bij technische opleidingen:

Bijvoorbeeld:

- Verband positie-snelheid-versnelling: $a = \frac{dv}{dt}$ & $v = \frac{ds}{dt}$ (s is afgelegde weg)
- Oppervlakte- en inhoudberekeningen (enkele, dubbele & drievoudige integralen)
- Oplossen van differentiaalvergelijkingen

Integreren

Specifieke vormen differentiaalvergelijkingen zijn op te lossen door de variabelen te scheiden en te **integreren**



Wat is snelheid van de boot v als functie van tijd t?

$$F = m \cdot a$$

$$F_{stuw} - F_{wrijving} = m \cdot a$$

$$F_{stuw} - c \cdot v = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$m \cdot \frac{dv}{dt} + c \cdot v = F_{stuw}$$

Hieruit valt $v(t)$ te bepalen (mits constantes bekend zijn)

Integreren

Andere differentiaalvergelijking:

$$\left(x^2 + 1\right) \cdot y' - 2xy^2 = 0$$

Hier kunnen we $y(x)$ bepalen door middel van integreren (en substitutie)

Integreren

$$\left(x^2+1\right)\cdot y' - 2xy^2 = 0$$

We lossen de differentiaalvergelijking op m.b.v. scheiden van de variabelen:

$$\left(x^2+1\right)\cdot \frac{dy}{dx} - 2xy^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{y^2}\,dy = \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

Integreren

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

De linker integraal bepalen we als volgt:

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{1}{y} + C$$

Integreren

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{2x}{x^2+1} dx$$

Om de rechter integraal te bepalen maken we gebruik van substitutie:

$u = x^2 + 1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{1}{2x} du = dx$

Dus $\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{2x}{u} \cdot \frac{1}{2x} du = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln\left|x^2+1\right| + C$

Integreren

Dit geeft:

$$-\frac{1}{y} = \ln\left|x^2 + 1\right| + \mathrm{C}$$

$$y = -\frac{1}{\ln|x^2 + 1| + C}$$

Contact:

Juriaan van der Graaf
graju@hr.nl

Wil je slides + voorbeeld/practicum-PDF ontvangen?

Laat je mail even achter in de chat!

HOGESCHOOL ROTTERDAM

overtref jezelf