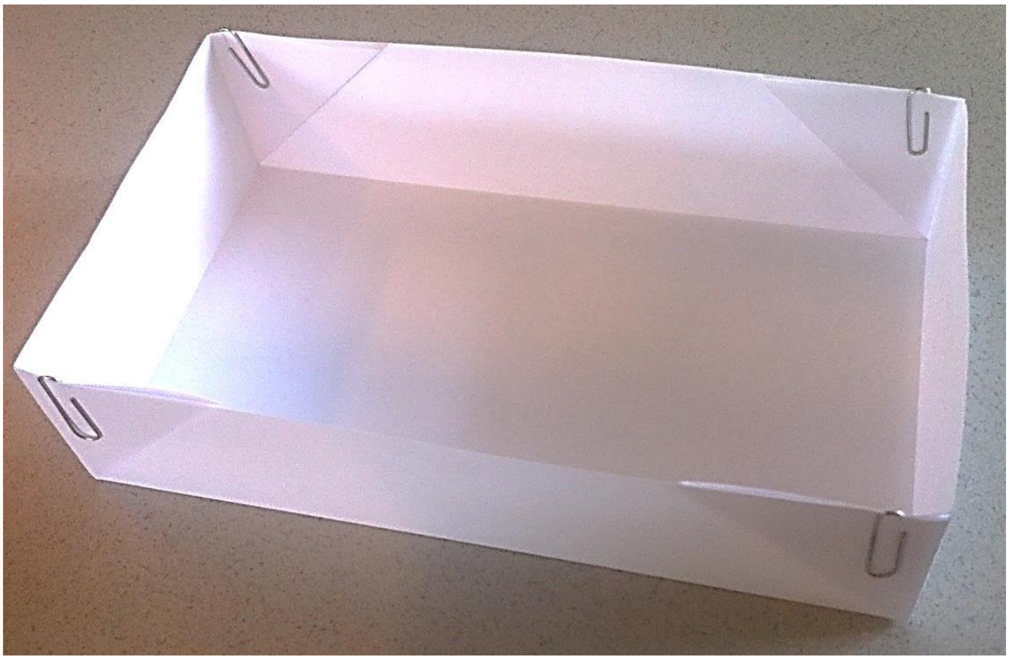
Door: Peter Overbeek

Waterbakje van een velletje A4

Van een velletje A4 papier kun je een waterbakje vouwen. Neem voor het gemak even aan dat een velletje A4 papier 30 bij 20 cm meet. De zijkanten vouw je allemaal over dezelfde lengte om, in de hoeken vouw je een tuitje naar binnen, paperclip erop en klaar.



De inhoud van het bakje hangt af van hoe ver je de zijkanten omvouwt (de "hoogte"). In andere woorden: er is een verband tussen de hoogte en de inhoud van het bakje. Als de hoogte heel klein is zal de inhoud ook klein zijn (want hoewel je dan een grote bodem hebt, past er maar een heel klein laagje water in). Maar als de hoogte heel groot is wordt de inhoud ook weer klein, want dat is er bijna geen grondoppervlak meer over. Voor de inhoud van het bakje is er blijkbaar ergens een optimum. Wat zou nu de maximale inhoud zijn van een bakje, gevouwen van een A4?

Een probleem als deze kun je op meerdere manieren oplossen:

1. Je kunt verschillende bakjes vouwen en er water ingieten om te kijken in welk bakje het meeste water past. Dit noem je een iteratief proces: door te proberen kom je steeds dichter bij het antwoord
2. Je kunt denkbeeldig enkele waarden voor de hoogte nemen en uitrekenen in welk bakje de inhoud het grootste is. Ook dit is een iteratief proces, al is het abstracter gemaakt (en waarschijnlijk sneller) omdat je geen echte bakjes meer vouwt.

Maar er is nog een interessante andere mogelijkheid. En die methode is:

3. Wiskundig het optimum bepalen, of in dit geval: de inhoud maximaliseren.

Wiskundig de maximale inhoud van het bakje bepalen

Om met behulp van de wiskunde de exacte hoogte te vinden waarbij de inhoud maximaal is, moeten we van dit probleem eerst een wiskundig model maken. Dat doe je als volgt:

We noemen de hoogte (die we nog niet weten) eerst maar even "x" (We zeggen ook wel: we stellen de hoogte van het bakje gelijk aan "x") en rekenen dan uit wat de inhoud wordt. In feite reken je nu dus gewoon de inhoud uit, maar in deze berekening zit nu een letter in plaats van een getal (Rekenen met letters heet in de wiskunde: Algebra). Zoals je weet bereken je de inhoud door de lengte te vermenigvuldigen met de breedte en met de hoogte. In formulevorm ("I" betekent "Inhoud"):

$$I = L \cdot B \cdot H = (30 - 2x) \cdot (20 - 2x) \cdot x$$

Immers: de lengte van het bakje is wat er overblijft als je van beide kanten van de lengte van het papier (van 30 cm lang) het opstaande randje afhaalt, oftewel: $L = 30 - 2x$. de breedte wordt zo: $B = 20 - 2x$. Let op dat je er in de formule haakjes omheen zet, anders reken je verkeerd door. De héle lengte moet namelijk vermenigvuldigd worden met de héle breedte etc.

Zo, het wiskundige model is klaar. We kunnen nu zeggen:

"De inhoud is een functie van de hoogte x", in wiskunde notatie :

$$I = f(x) = (30 - 2x) \cdot (20 - 2x) \cdot x$$

In plaats van een waterbakje die we ons kunnen voorstellen met een bekende hoogte en een zichtbare inhoud hebben we nu een wiskundige functie die alle mogelijke bakjes die je maar kunt maken al in zich heeft. Een heel stuk abstracter dus. Maar het fijne van de abstractie van de wiskunde is dat in de wiskunde algemene rekenregels gelden. Functies kun je herschrijven, onafhankelijk wat de functie nu precies beschrijft. In onze functie kunnen we bijvoorbeeld de haakjes wegwerken. En, nog belangrijker: we kunnen van onze wiskundige functie het maximum bepalen!

Laten we eens beginnen met de haakjes wegwerken:

$$f(x) = (30 - 2x) \cdot (20 - 2x) \cdot x = (600 - 60x - 40x + 4x^2) \cdot x = 600x - 100x^2 + 4x^3$$

Meestal schrijven we een functie als deze (voor wie het wil weten, zo'n functie heet een polynoom) met de hoogste macht vooraan:

$f(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$

Een functie als deze noemen we een derdemachtsfunctie (een functie met een x in de derde macht). Zonder precies te weten wat een derdemachtsfunctie is en hoe die eruit ziet kunnen we hem al direct gebruiken om er heel makkelijk de inhoud van het bakje mee te berekenen. Het enige wat we hoeven te doen is een waarde (een getal) in te vullen voor de hoogte x en dan rolt de inhoud er gewoon uit. Maar wat leuker is: we kunnen ook uitrekenen voor welke x de functie maximaal is (bij welke hoogte er het meeste water in het bakje kan). Laten we dat dan maar eens doen.

Het maximum van een functie (bijvoorbeeld de top van een parabool) kun je uitrekenen omdat er op de top van een functie altijd iets speciaals geldt: een raaklijn getekend aan een functie zal op de top precies horizontaal lopen! Anders gezegd: op de top van een functie is de richtingscoëfficiënt (de "helling") gelijk aan 0. De richtingscoëfficiënt van een functie kun je berekenen door "de afgeleide te nemen" van de functie. daar zijn vaste regels voor in het stuk wiskunde wat hierover gaat: Analyse.

Laten we de afgeleide maar eens nemen van onze functie. In wiskundige notatie gaat dat zo:

De functie was: $f(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$

Dan is de afgeleide van deze functie: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 12x^2 - 200x + 600$

De functie was een derdemachtsfunctie, de afgeleide is een tweedemachtsfunctie. Die kennen we als het goed is, de vorm daarvan in een grafiek is een parabool.

Even terug naar waarom we de afgeleide ook alweer hadden bepaald: We hadden de afgeleide bepaald omdat we wilden weten voor welke waarde van x de afgeleide precies 0 was, want waar de afgeleide van een functie 0 is heeft de functie zelf een maximum (of een minimum, want ook daar is de richtingscoëfficiënt 0!). Dat maximum wilden we weten: bij welke hoogte past er het meeste water in het bakje, en hoeveel is dat dan? We zijn nu bijna bij het antwoord op die vraag. Om te weten waar de functie maximaal is moet de afgeleide daar gelijk zijn aan 0:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 200x + 600 = 0$$

Dit kunnen we oplossen met de ABC formule. Weet jij die nog uit je hoofd? De ABC formule zegt:

$als\ f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, waarbij $a, b\ en\ c$ getallen zijn, dan zijn de oplossingen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, waarin\ D\ (die\ heet\ de\ discriminant) = b^2 - 4ac$$

Er staat 1,2 als subscript bij de x omdat er twee oplossingen zijn: één als je voor de wortel een + invult, en één als je daar een – invult. Als er dan twee verschillende antwoorden uitkomen zijn dus er twee plekken waar onze functie een extreme waarde (maximum of minimum) heeft.

Laten we de ABC formule eens invullen:

$$12x^2 - 200x + 600 = ax^2 + bx + c,$$

$$dus\ a = 12, \qquad b = -200 \quad en \quad c = 600$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{200 + \sqrt{(-200)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 600}}{2 \cdot 12} = 12{,}743$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{200 - \sqrt{(-200)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 600}}{2 \cdot 12} = 3{,}9237$$

Er zijn dus twee plaatsen waar deze functie een extreme waarde heeft. Een ervan (de waarde 12,7) is een vreemde waarde die in het geval van onze waterbak niet zoveel zegt. Als we een hoogte van 12,7 cm willen vouwen lukt dat niet (probeer maar). We kunnen niet verder gaan dan 10 cm, want dan blijft er al geen bodem meer over. Als de waarde van x niet overal zinnig is

(in ons geval moet hij tussen de 0 en de 10 cm blijven wil het werkelijk gaan over de inhoud van een bakje) noem je dat in de wiskunde: “het domein van de functie f(x) is 0 < x < 10”

Je zegt dan eigenlijk dat je jezelf bij het bekijken van de functie beperkt tot waarden van x die voor ons geval zinnig zijn. De oplossing $x_1 = 12{,}7$ ligt buiten ons domein, en kunnen we dus niet gebruiken. (In de grafiek van de functie (verderop in dit document) zal blijken dat de grafiek bij x_1 een dal heeft, de vertaling naar inhoud van een bakje gaat daar niet meer op).
Blijft dus over: De hoogte van het bakje met maximale inhoud is: $x_2 = 3{,}9237$ cm

Deze hoogte kunnen we invullen in de functie f(x) om de maximale inhoud te berekenen:

$$I_{max} = f(x_2) = f(3{,}9237) = 4(3{,}9237)^3 - 100(3{,}9237)^2 + 600(3{,}9237)$$

$$I_{max} = 1056{,}3\ cm^3 = 1{,}06\ liter$$ [Uitkomst]

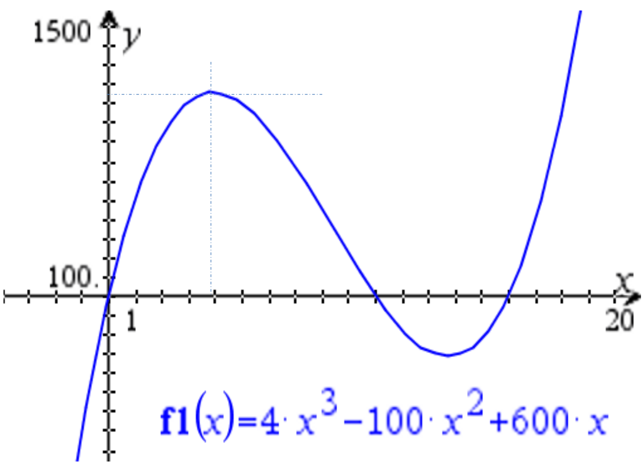
Het antwoord

Het is altijd erg belangrijk om even stil te staan bij wat je nu gevonden hebt. Ons wiskundige model geeft slechts een uitkomst (een getal op ons rekenmachientje), maar wat we zochten was een antwoord. Je moet het getal dus nog interpreteren. Een antwoord is pas een antwoord als je het in het Nederlands formuleert:

De maximale inhoud van een bakje die je kunt vouwen van een A4’tje (30x20cm) is 1,06 liter [Antw.]

Grafische methode

Een andere mogelijkheid is dat we het maximum op een grafische manier vinden door de functie van de inhoud te tekenen in een grafiek. De inhoud van het bakje is, zoals eerder opgemerkt, een derdemachtsfunctie. Als we hem tekenen (bijvoorbeeld zoals hieronder met behulp van een grafische rekenmachine) heeft die een heel karakteristieke vorm met een top en een dal:



Direct is te zien dat (op het domein van 0 tot 10 cm) het maximum ergens net voor de 4 cm moet liggen, en de inhoud daar iets van 1050 cm^3 bedraagt. De tweede extreme waarde geeft een negatieve inhoud van het bakje en valt daarmee duidelijk af.

Vraagje: wat zal de maximale inhoud zijn van een bakje, gevouwen uit een blaadje van 40 x 30 cm?

De Skills.

In de oplossing van het probleem van het waterbakje gebruik je een heel aantal wiskundige skills:

Wiskundig model maken (vertaling van een probleem naar een wiskundig model)
Rekenen met letters (Algebra)
Haakjes wegwerken
Rekenen met machten
Extreme waarden bepalen (maximum bepalen) via differentiëren / op nul stellen (Analyse)
ABC formule
domein (en bereik) bepaling, notatie en interpretatie
getalsinterpretatie en notatie
significantie/ nauwkeurigheid
omrekenen van eenheden
terugvertalen van model terug naar probleem (van wi: uitkomst naar NL: antwoord)
functieanalyse
functieplotten en maximum aflezen (GR)
evt: CAS rekenmachine: solve for x, of Excel: parametrische rekensheet